MAT 3019 SAYILAR TEORİSİ 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **06.11.2017**
No :..

Soru 1) Hangi n pozitif doğal sayıları için n sayısı (n-1)! sayısını böldüğünü belirleyiniz.

n asalsa n'in n-1'e kadar olan sayıları bölmeyeceği açıktır. n>5 birleşik bir sayı olsun. n'in en küçük asal çarpanına p diyelim. O halde $2 \le p \le k$ olmak üzere n=pk yazılabilir. Eğer p=2 olursa p = 2 < k < n-1 olacağından 2|(n-1)! ve k|(n-1)! olacaktır. Dolayısıyla 2k|(n-1)! yani n|(n-1)! elde edilir. Eğer p > 2 ise 2 < p < (p-1)k = n-k $\le$ n-1 ve n/k > 2 olduğundan dolayı k < n/2 < n-1 olup yine n|(n-1)! elde edilir.

Soru 2) Hangi n doğal sayıları için n!+7 sayısının asal olduğunu belirleyiniz.

n>6 için n! sayısı 7 ile bölünebilirdir ve bu nedenle n!+7 toplamı da 7 ile bölünebilirdir ve asal olamaz. Geriye 6 ve daha küçük n sayıları için iddianın doğruluğunu test etmek kalır. n=0 için 8, n=1 için 8, n=2 için 9 asal değildir. n=3 için 13, n=4 için 31, n=5 için 127 ve n=6 için 727 asaldır.

Soru 3) 1'den büyük, n-1'den küçük ve n ile aralarında asal olan doğal sayıların toplamı 45 ise n sayısını bulunuz.

1 ile n arasında olup n ile aralarında asal olan doğal sayıların toplamı $n\cdot\varphi(n)/2$ ile hesaplanır. 1'den büyük, n-1'den küçük sayılar dediği için aranan toplam $n\cdot\varphi(n)/2-1-(n-1) = n\cdot\varphi(n)/2-n$ şeklindedir. O halde $n\cdot\varphi(n)/2-n = 45$ eşitliğinden 90'ın pozitif bölenleri denenerek n = 15 elde edilir.

Soru 4) Tanesi 17 TL ve 23 TL olan iki tür üründen toplam 770 TL'lik satın alan bir kişi bu ürünlerden kaçar tane satın almıştır?

17x+23y=770 lineer Diophant denkleminin pozitif çözümlerini arıyoruz. Euclid algoritması tersine kullanılarak 1=17(-4)+23(3) ve böylece

$$770=17(-3080)+23(2310)$$

elde edilir. Yani bulunan (-3080,2310) ikilisi bir özel çözümdür. Ancak aranan çözüm pozitif sayılardan oluşacağından genel çözüm bulunur. Bu da t bir tamsayı olmak üzere x=-3080+23t ve y=2310-17t şeklindedir. Bu sayıların pozitif olması gerektiğinden 133,9 < t < 135,8 elde edilir. Yani t=134 veya 135 olabilir. Karşılık gelen (x,y) çözümleri ise (2,32) ile (25,15) şeklindedir.

Soru 5) $1^{81}+3^{81}+7^{81}+9^{81}$ toplamının 100 modundaki değerini hesaplayınız.

$100=2^2\cdot5^2$ birleşik sayı olduğundan Euler teoremi gereği $\varphi(100)=40$ olup (a,100)=1 olacak şekildeki her a doğal sayısı için

$$a^{\varphi(100)} \equiv a^{40} \equiv 1 \quad (100)$$

olur. 1, 3, 7 ve 9 sayıları 100 ile aralarında asal olduklarından

$$1^{81}+3^{81}+7^{81}+9^{81} \equiv 1+3(3^{40})^2+7(7^{40})^2+9(9^{40})^2 \ (100)$$
$$\equiv 1+3+7+9 \ (100)$$
$$\equiv 20 \ (100)$$

elde edilir.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. ***inc+ay***